CAHIER DE VACANCES

Avant d'attaquer ces quelques exercices de révision, il est indispensable d'avoir les idées bien claires sur l'ensemble du contenu du cours de première année. Cela concerne les résultats du cours et leurs démonstrations, les exercices, les colles et les devoirs surveillés de chaque chapitre du cours de mathématiques et d'informatique. Il peut être utile de préparer des fiches pour mémoriser le cours et pour se donner des méthodes systématiques et efficaces pour résoudre les exercices. Le programme de deuxième année s'appuie largement sur celui de la première année et il n'est pas possible d'entrer sereinement en seconde année sans parfaitement maîtriser le contenu de la première année. Par ailleurs, les sujets de concours portent sur les deux années.

L'année prochaine sera intense et commencera très vite. Le premier chapitre est essentiellement constitué de rappels sur la convergence des suites de nombres réels mais contient aussi quelques compléments (comparaisons des comportements asymptotiques des suites, relations d'équivalence $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ et de négligeabilité $u_n = \underset{n\to\infty}{\mathbf{o}} v_n$).

Ce premier chapitre (cours et exercices) est à étudier pendant l'été. Le travail consiste à lire le cours, compléter les démonstrations et analyser les différents exemples ; puis à rédiger les solutions des exercices. Le sujet du premier devoir sera inspiré à la fois des exercices de révision et de ce premier chapitre sur les suites.

En résumé voici le travail à faire, par ordre de priorité.

- Réviser la totalité du contenu du programme de première année.
- Résoudre les exercices de révision (les deux dernières parties sont réservées aux étudiants qui vont viser le Top 5).
- Travailler le premier chapitre (cours et exercices) du cours de seconde année.

Bon courage, bonnes vacances et au plaisir de vous voir à la rentrée !

Louis Merlin.

ECG 1 → 2, http://louismerlin.fr.

(*) *Facile* (**) *Classique/intermédiaire* (***) *Difficile* (****) *Approfondissement*

Mini exercices / Questions classiques

Calcul.
Exercice 1.-
(*) Résoudre le système suivant

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y-3z-t &=& 0 \\ 2x+y-5z+4t &=& 4 \\ x-2y+3t &=& -2 \\ -x+y+z-2t &=& -1 \end{array}\right.$$

Exercice 2.-
(*) Montrer de deux manières différentes (par récurrence, puis à l'aide des formules de sommes usuelles) que

$$\sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1) = \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}.$$

Exercice 3.-
(*) Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0;n]\!]$,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Exercice 4.-
(**) Montrer, par la méthode de votre choix, que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \geq p+1$,

$$\sum_{k=p}^{n-1} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n-1}{p}.$$

Exercice 5.-
(**) Calculer les sommes doubles suivantes

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min\{i,j\} \qquad \text{et} \qquad \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{i}{j}.$$

Analyse.
Exercice 6.-
(*) Montrer que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

Exercice 7.-
(*) Quelle est la nature de la branche en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt{e^{3x}+x-1}\right)$

Exercice 8.-
(*/**) Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercice 9.-
(*/**) Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = (u_n^2+1)/2$ est croissante, majorée par 1 et donc convergente vers une limite à préciser.

Exercice 10.-
(**) Montrer que la fonction f définie ci-dessous est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
On commencera par montrer f est continue en 0. Puis, après avoir justifié que f dérivable en dehors de 0 on calculera $f'(x)$, pour $x \neq 0$. On montrera que f dérivable en 0, à l'aide du *développement limité* à l'ordre 2 ci-dessous
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0,$$
et enfin que f' est continue en 0.

Exercice 11.-
(**) Montrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Exercice 12.-
(*/**)

1. Déterminer toutes les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle
$$\varphi'(t) = 2\varphi(t).$$

2. Soit c un réel. Montrer que la fonction $t \mapsto cte^{2t}$ est solution particulière de l'équation différentielle
$$\varphi'(t) = 2\varphi(t) + ce^{2t}.$$

3. Déterminer toutes les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle
$$\varphi'(t) = 2\varphi(t) + ce^{2t}.$$

Exercice 13.-
(*) Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1.$$
(*On essaiera de faire apparaître une somme télescopique.*)

Exercice 14.-
(**) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, l'équation $x^{3n} + n^n x^n - 1 = 0$ admet une unique solution strictement positive a_n. Montrer que $a_n < 1/n$ et en déduire la limite de a_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 15.-
(*/**)Montrer que la fonction $f : x \mapsto x\exp(x^2)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser et donner l'équation de la tangente à la courbe de f^{-1} en 0.

Exercice 16.-
(*) Montrer la convergence et calculer la somme des séries ci-dessous

$$(i) \sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)^2(-2)^{n+2}}{5^n}, \qquad (ii) \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Exercice 17.-
(*/**) Calculer, avec un changement de variable, les intégrales

$$(i) \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{3t-1}, \quad (u = 3t-1), \quad (ii) \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t, \quad (u = 1-\sqrt{t})),$$

$$(iii) \int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x, \quad (u = 1+e^x), \quad (iv) \int_1^A \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t, \quad (u = \ln(t)).$$

Exercice 18.-
(**) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 19.-
(***) Soit $x \in [0,1[$ fixé.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt.$$

2. Utiliser une technique similaire à l'exercice précédent pour obtenir

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt = 0.$$

Exercice 20.-
(****)
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et soit $x \in]0,1[$. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(x) = \sum_{ke=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt,$$

où $f^{(0)} = f$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}$ désigne la k ième dérivée de f.

On pourra s'aider d'une intégration par parties.

Exercice 21.-

(*Python) Écrire un programme qui calcule et affiche petit entier N tel que $u_N \geq A$, où la suite (u_n) est définie par

$$u_0 = 2, \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \exp(u_n) - e\ln(u_n).$$

Exercice 22.-

(**Python) Écrire un programme de dichotomie permettant de donner une valeur approchée à 10^{-4} de la solution de l'équation $e^x + x = 3$.

Exercice 23.-

(**Python) Écrire un programme permettant de calculer le terme u_n où la suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad \text{et} \quad u_{n+2} = \frac{7}{2}u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n.$$

Représenter graphiquement les 50 premiers termes de la suite $(u_n/3^n)$. Interpréter.

Algèbre Linéaire.

Exercice 24.-

(*/**) Déterminer **soigneusement**, par la formule du binôme, les puissances A^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 25.-

(*/**) On considère la matrice A ci-dessous

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. À l'aide du pivot de Gauss, vérifier que A est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $A^2 - 4A + 3I$. En déduire une nouvelle preuve que A est inversible et donner une expression de A^{-1} en fonction de A et de I.

Exercice 26.-

(*) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Résoudre les équations $AX = 0$, $AX = X$ et $AX = 3X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On présentera les solutions sous forme d'*espace vectoriel engendré* par une famille (finie) de vecteurs.

Exercice 27.-
(*) Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $B^2 + B$ et déduire que B n'est pas inversible.

Exercice 28.-
(*/**) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *nilpotente*, c'est à dire pour laquelle il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

1. Calculer $(I_n - A)(I_n + A + A^2 + ... + A^{p-1})$.

2. En déduire que $I_n - A$ est inversible et préciser son inverse.

Exercice 29.-
(*/**) À l'aide du *déterminant*, déterminer les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible, où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 30.-
(**) Pour chacune des matrices M suivantes, déterminer l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels $A - \lambda I$ n'est pas inversible. Pour chaque valeur λ trouvée, résoudre $(M - \lambda I)X = 0$ où $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$(i)\ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (ii)\ M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (ii)\ M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 31.-
(*) Montrer que la famille de vecteurs ci-dessous forme une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 32.-
(*/**) Sans aucun calcul, déterminer le rang de la matrice ci-dessous. En déduire, toujours sans calcul, une base de son noyau.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Probabilités (élémentaires).

Exercice 33.-
(*/**) Montrer que, si C et D sont deux événements d'un même espace probabilisé, alors

$$P(C \cup D) \leq P(C) + P(D).$$

En déduire que, si (A_j) est une suite d'événements du même espace, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \geq P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right).$$

Exercice 34.-
(***) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, ..., A_n$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer, par récurrence sur n (et à l'aide de la formule du crible) que

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - (n-1).$$

Exercice 35.-
(**) Un voyageur prend l'avion. À chaque voyage, la probabilité que sa valise soit retardée est de 1/12 et les incidents de bagages sont indépendants à chaque vol. En introduisant les événements A_n correspondant à "le voyageur ne subit pas de retard de bagage au cours des n premiers vols", montrer à l'aide du résultat de la limite monotone que, presque sûrement, ce voyageur subira un retard de valise lors d'une répétition infinie de trajets en avion.

Variables aléatoires réelles.
Exercice 36.-
(**) Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. La valeur renvoyée par X a-t-elle plus de chances d'être paire ou impaire ? On proposera deux démonstrations.

Exercice 37.-
(*/**) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$. Montrer $E(X) = (n+1)/2$.

Exercice 38.-
(**/***) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Montrer, à l'aide de la formule du binôme, que $E(X) = np$.

Exercice 39.-
(**/***) Soit X une v.a. finie telle que $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$. Monter que

$$E(X) = \sum_{j=0}^{n-1} P(X > j).$$

Exercice 40.-
(**/***) On effectue des tirages **sans remise** d'une boule dans une urne contenant $N-1$ boules blanches et une boule noire. On note X le rang d'apparition de la boule noire. Montrer soigneusement que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;N]\!])$.

Exercice 41.-
(*) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Montrer que X **admet** une espérance et que $E(X) = 1/p$.

Exercice 42.-
(***) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. On suppose que, **sachant** $(X = n)$, la variable aléatoire Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Montrer que $Y \hookrightarrow P(p\lambda)$.

Exercice 43.-
(***) Soient X et Y deux v.a. indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. Montrer que $\min(X,Y) \hookrightarrow \mathcal{G}(1-(1-p)^2)$.

On rappelle que deux variables aléatoires discrètes X et Y sont dites *indépendantes* si et seulement si pour tout $(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$P([X=i] \cap [Y=j]) = P(X=i)P(Y=j).$$

On commencera par calculer $P(X \geq k)$, puis, notant $Z = \min(X,Y)$, $P(Z \geq k)$ et on utilisera le fait que,

$$P(Z=k) = P(Z \geq k) - P(Z \geq k+1).$$

Algorithmique. Python.

Exercice 44.-
(*/**) Compléter la fonction tri(L) ci-dessous qui prend en argument une liste L et renvoie une liste dont les éléments sont ceux de L listés par ordre croissant.

```
def tri(L):
  n=len(L)
  for i in range (n):
    i_min=i
    for j in range (i+1,n):
      if L[j]<L[i_min]:
        i_min= .....
    aux=L[i]
    L[i]=.....
    L[i_min]=.....
  return L
```

Exercice 45.-
(**) Écrire une fonction recherche(x,L) qui prend en argument un réel x et une liste L (déjà triée par ordre croissant) dont on sait que le premier terme est inférieur ou égale à x et le dernier supérieur (strict) à x et qui renvoie le plus grand terme de la liste L qui soit inférieur ou égal à x.

Exercice 46.-
(**/***)

Écrire une fonction selection(L) qui prend en argument une liste L et renvoie un élément x sélectionné uniformément au hasard dans L et une nouvelle liste U obtenue à partir de L en retirant x.

Exercice 47.-
(**)

Écrire une fonction symetrie(P,Q) qui prend en argument deux listes de mêmes longueurs $\mathsf{P} = [p_0, \cdots, p_n]$ et $\mathsf{Q} = [q_0, \cdots, q_n]$ et qui calcule et renvoie la valeur de la somme s où

$$\mathsf{s} = \sum_{i=0}^{n} p_i q_{n-i}$$

Exercice 48.-
(**) Une guirlande électrique est composée de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3 et S_4 et change d'état de la manière suivante :

- à l'instant $t=0$, le spot S_1 est allumé,

- Si à l'instant $t = n$, le spot S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots s'allume à l'instant $t = n+1$, et ceci de manière équiprobable.
- Si à l'instant $t = n$, le spot S_k est allumé ($2 \leqslant k \leqslant 4$), le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n + 1$.

On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant où le spot S_2 s'allume

Écrire une fonction `spot()` (sans argument) qui simule la variable aléatoire X.

Exercice 49.-
(***/****) Écrire une fonction `ordre_inverse(x)` qui prend en argument un nombre entier `x` et renvoie le nombre composé des mêmes chiffres que `x` mais dans l'ordre inversé. Par exemple, on veut que `ordre_inverse(8973)` renvoie 3798.

On pourra commencer par écrire une fonction `taille(x)` qui renvoie le nombre de chiffre dont `x` est constitué.

Extraits (faciles) de textes de concours

Exercice 50.-
(*/**)

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que si $p \leqslant n$ sont deux entiers naturels non nuls, alors $0 \leqslant x^p \leqslant 1 + x^n$.
2. On considère une variable aléatoire X ayant pour densité une fonction f telle que $f(t) = 0$ si $t < 0$. Montrer que, si X admet un moment d'ordre n, alors X admet aussi un moment d'ordre p pour tout $p \leq n$.
3. Même question avec X variable discrète telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Exercice 51.-
(**) Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n qui à tout réel x associe le nombre
$$f_n(x) = n - xe^x.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; +\infty[$. Cette solution sera notée u_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant $f_{n+1}(u_n)$, montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer par l'absurde que la suite (u_n) n'est pas convergente. Qu'en déduit-on sur sa limite ?
4. Déterminer u_0.
5. Proposer un programme `Python` permettant de calculer et d'afficher une valeur approchée à 10^{-3} de u_1.

Exercice 52.-
(**) On considère la fonction f, dont la courbe est notée C_f, définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = x - 2 + \exp(-x).$$

1. **a.** Calculer
$$\lim_{x \to +\infty} f(x).$$
   b. Montrer que la courbe C_f admet en $+\infty$ une droite asymptote Δ d'équation $y = x - 2$.
   c. Calculer
$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \quad \text{puis} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}.$$
   Que pouvez-vous dire sur le comportement asymptotique de la courbe de f en $-\infty$?

2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x. Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. Justifier que C_f coupe l'axe des abscisses en exactement deux points d'abscisses α et β, le premier étant positif, le deuxième étant négatif.

On donne $e \approx 2{,}7$. Prouver que $\alpha \in]1, 2[$.

4. Tracer l'allure de C_f et Δ. On donne $\alpha \approx 1{,}84$ et $\beta \approx -1{,}14$.

5. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2 - \exp -x$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que pour tout réel x, on a : $g(x) = x$ si et seulement si $f(x) = 0$.
b. Calculer la dérivée de g. En déduire le sens de variation de g.
Montrer alors que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n.
c. Établir que pour tout réel x appartenant à $[1, 2]$: $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{e}$.
d. En déduire, en appliquant l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier naturel n

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha|.$$

e. Montrer par récurrence que

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{\exp(n)}.$$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
f. Écrire un programme Python permettant d'obtenir une valeur approchée de α à 10^{-4} pràs.

Exercice 53.-
(**)
Pour tout entier n on note :

$$I_n = \int_0^1 e^{-x^2}(1 - x)^n dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 xe^{-x^2}(1 - x)^n dx.$$

1. **a.** Former le tableau de variation sur [0,1] de $x \to xe^{-x^2}$.
b. En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{\sqrt{2e}(n + 1)}.$$

c. Étudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. **a.** A l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$I_n = \frac{1}{n + 1} - \frac{2}{n + 1}J_{n+1}.$$

b. En déduire la limite de I_n et celle de nI_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 54.-
(*) Dans $\mathbb{R}^4$, on note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique et on considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ défini par

$$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_4 \quad f(e_2) = f(e_1) - e_3 \quad f(e_3) = -e_1 + e_2 \quad \text{et} \quad f(e_4) = -3e_1 - 2e_2 + e_3 - 2e_4.$$

1. Écrire la matrice K de f dans la base $\mathcal{B}$.

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. En déduire $\mathrm{Im}(f)$. Que peut-on dire de l'inversibilité de K ?

3. Déterminer la matrice de $f^2 = f \circ f$ dans la vase canonique.

4. On introduit alors les vecteurs

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = f(e_1), \quad v_3 = e_3, \quad v_4 = f(e_3).$$

a. Montrer que la famille $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b. Exprimer, pour $i = 1, 2, 3, 4$, $f(v_i)$ en fonction de v_1, v_2, v_3, v_4. En déduire la matrice de f, notée L dans la base $\mathcal{C}$.

5. On introduit la matrice P dont le colonnes sont les vecteurs de la base $\mathcal{C}$.

a. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

b. Que vaut $P^{-1}KP$?

Exercice 55.-
(**)

Un après-midi de canicule, vous êtes allongé sur le canapé du salon de votre appartement, composé de deux pièce (une chambre et un salon). La fenêtre du salon est ouverte. Une mouche se balade tranquillement dans l'appartement en produisant ce bruit bien agaçant comme les mouches savent le faire ; ce qui perturbe votre sieste. Au départ, la mouche se trouve dans la salon. À chaque seconde, elle se déplace en suivant le protocole suivant :

1. Si elle est dans le salon, elle y reste avec probabilité $1/2$, sort de l'appartement par la fenêtre ouverte avec probabilité $1/4$ ou va faire un tour dans la chambre avec probabilité $1/4$.

2. Si elle est dans la chambre, elle y reste avec probabilité $3/4$ ou retourne dans le salon avec probabilité $1/4$.

3. Une fois qu'elle est sortie, vous fermez la fenêtre et elle va embêter quelqu'un d'autre.

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, X_n la variable aléatoire qui vaut 0, 1 ou 2 selon si la mouche se trouve dehors, dans le salon ou dans la chambre respectivement, après n déplacements. En particulier $X_0 = 1$. Toujours pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}, \qquad \Pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Écrire le graphe de la matrice d'adjacence A correspondant à la chaine (X_n). Que vaut $A\Pi$. Écrire une relation entre U_n, A et Π que l'on démontrera.

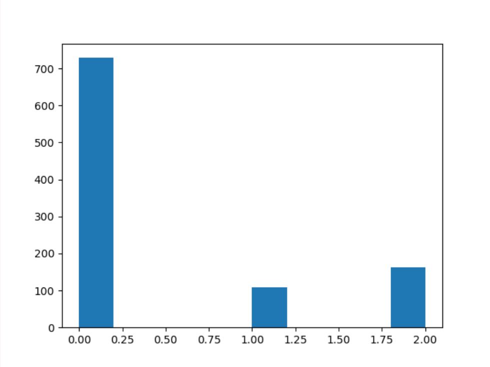
2. **a.** Écrire une fonction Python simul_X(n) qui simule n déplacements de la mouche et renvoie la *trajectoire* X_n.

b. On rajoute les instructions suivantes et on fait varier n en prenant les valeurs $n = 10$, $n = 25$ et $n = 50$, ce qui permet d'obtenir les figures ci-jointes. Que peut-on conjecturer ?

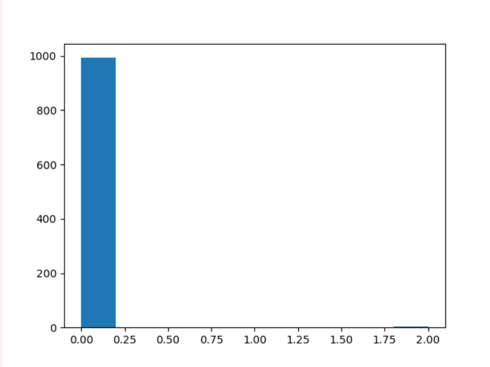
```python
n=10    # puis n=25 puis n=50 puis n=100
sample=[simul_X(n)[n-1] for k in range(1000)]

plt.hist(sample)
plt.show()
```

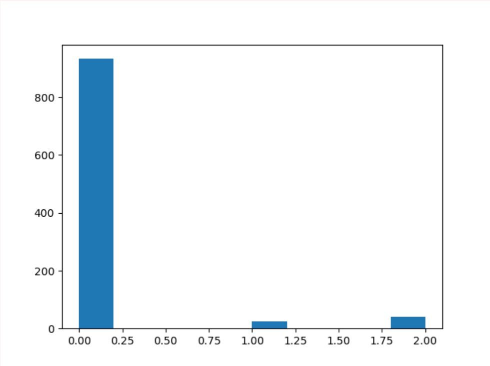
$n = 10$



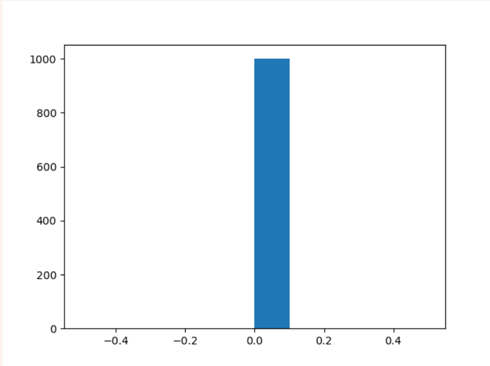
$n = 50$



$n = 25$



$n = 100$



Variables aléatoires finies : apparition du premier roi rouge.

Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges (carreau et cœur), et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

Partie 1 - Premier protocole. Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon alétoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge.

1. Simulation avec Python.

a. Compléter la fonction suivante afin qu'elle simule la variable X.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(n) :
  y=1
  T=2*n # nombre de cartes a retourner
  while ........ :
    ..........
    ..........
  return .......
```

b. On suppose que l'on dispose de fonction tri(L) qui, pour une liste de valeurs L renvoie une liste triée par ordre croissant (les éléments étant éventuellement répétés s'ils apparaissent plusieurs fois dans la liste initiale). Écrire une fonction tab_freq(L) qui, prenant en argument une liste de valeurs L renvoie une première ligne correspondant aux différentes valeurs de L et une deuxième ligne correspondant aux fréquences d'apparition de chaque valeur dans la liste.

c. On prend $n = 16$. On ajoute les commandes suivantes qui permettent l'affichage ci-après.

```
import matplotlib.pyplot as plt

sample=[simul_X(16) for k in range (1000)]
T=tab_freq(sample)

plt.bar(T[0], T[1])
plt.show()
```

(i) Quelles instructions permettent d'obtenir une estimation de $E(X)$?

(ii) Donner une estimation graphique de $P(X = 1)$. Que vaut vraiment $P(X = 1)$?

2. Que vaut $X(\Omega)$?

3. Montrer que, pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$P(X = k) = \frac{2n - k}{n\,(2n - 1)}.$$

4. Montrer que $E(X) = \dfrac{2n + 1}{3}$.

Le joueur perd un euro chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros lorsqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte, G_1 est égale à $a - k$.

5. Exprimer G_1 en fonction de a et X. En déduire l'expression de $E(G_1)$ en fonction de a et n.

6. Avec quelles instructions supplémentaires peut-on simuler G_1 ?

Partie 2 - Deuxième protocole. Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes.

Le joueur perd un euro à chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros lorsqu'il obtient le premier roi rouge.

On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k$ème carte découverte ($k \leqslant n$), G_2 est égale à $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

7. Écrire, en reprenant une partie du programme précédent, une fonction simul_G_2(a,n), qui simule la variable G_2.

8. Pour tout entier $k \in [\![1; n]\!]$, déterminer $P\left(G_2 = a - k\right)$.

9. Vérifier que

$$P(G_2 = -n) = \frac{n - 1}{2\,(2n - 1)}.$$

10. Obtenir alors que

$$E\left(G_2\right) = \frac{3\,(3n - 1)\,a - \left(7n^2 - 1\right)}{6\,(2n - 1)}.$$

11. On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$). Déterminer (éventuellement avec l'aide de Python), selon les valeurs de a, le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

Approfondissement * : intégrale généralisée

En deuxième année d'ECG, nous étudierons la notion d'intégrale généralisée dont voici une définition (nous y reviendrons).

Définition : Intégrale généralisée

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. On dit que l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt$$

converge si la limite

$$\lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(t)dt$$

existe. Auquel cas, on note

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(t)dt$$

Ceci permet de généraliser la notion d'intégrale à un intervalle non borné.

Un premier exercice classique.

1. En calculant explicitement l'intégrale $\displaystyle\int_0^A e^{-t}dt$ puis en passant à la limite, montrer la convergence et donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$. On note I_0 cette intégrale.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à la suite d'intégrales (I_n) définies par

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt.$$

a. Soit $A > 0$ fixé. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que

$$\int_0^A t^{n+1}e^{-t}dt = (n+1)\int_0^A t^n e^{-t}dt - A^{n+1}e^{-A}.$$

b. En déduire, à l'aide d'une récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est une intégrale convergente et que $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

3. Obtenir alors une formule pour I_n que l'on démontrera par récurrence.

Un autre exercice inspirée d'EDHEC.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^n dt.$$

1. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

2. Montrer que pour tout $u \in [0, 1]$,

$$0 \leqslant 1 - u \leqslant e^{-u}.$$

3. Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, on a $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$.

En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$. En particulier, on a, pour tout $A \in \mathbb{R}$,

$$0 \leqslant \int_0^A e^{-x^2}dx \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

4. En déduire, à l'aide du changement de variables $x = \sqrt{nu}$ que

$$I_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

5. En déduire la limite de (I_n).

6. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$I_n = \frac{2}{2n+1} I_{n-1}.$$

7. En déduire, par récurrence, que

$$I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

Remarque.

Il est possible, avec les moyens du programme d'ECG de montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$. En revanche, on ne peut pas calculer la valeur de celle-ci. Avec des techniques qui vont donc au-delà du programme de ECG, on pourrait montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Approfondissement ** : une annale ESSEC II.

Préliminaires. Soit X et Y deux variables indépendantes suivant toutes deux une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

1. Montrer que $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

2. Généraliser le résultat par récurrence (on admettra que si $X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}$ sont mutuellement indépendantes, le *lemme des coalitions* permet d'affirmer que $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ est indépendante de X_{n+1}).

Distance en variation. On considère un ensemble K qui peut être ou bien une partie finie de $\mathbb{N}$, ou bien égale à $\mathbb{N}$ tout entier. Sur l'espace $(K, \mathcal{P}(K))$, on définit deux probabilités P et Q et on note

$$p_k = P(\{k\}) \qquad \text{et} \qquad q_k = Q(\{k\}).$$

En particulier, on a $p_k, q_k \geqslant 0$ et

$$\sum_{k\in K} p_k = \sum_{k\in K} q_k = 1,$$

et, si A est une partie de K,

$$P(A) = \sum_{k\in A} p_k.$$

Si K est fini, on introduit la *distance en variations entre les probabilités* P et Q par la formule

$$D(P,Q) = \frac{1}{2}\sum_{k\in K} |p_k - q_k|.$$

3. On suppose dans cette question que $K = \{0,1\}$.
Exprimer $D(P,Q)$ en fonction de p_1 et q_1.

4. On suppose dans cette question que $K = \mathbb{N}$.

a. Montrer, à l'aide de l'inégalité triangulaire, que la série de terme général $|p_k - q_k|$ est convergente.
On généralise alors la notion de distance en variation entre les probabilités P et Q définies sur $\mathbb{N}$ en posant

$$D(P,Q) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} |p_k - q_k|.$$

b. Vérifier que pour toute partie A de $\mathbb{N}$, on a $|P(A) - Q(A)| \leqslant 1$.

c. Montrer que, pour toute partie A de $\mathbb{N}$,

$$2\,|P(A) - Q(A)| = \left|\sum_{k\in A}(p_k - q_k)\right| + \left|\sum_{k\in \bar{A}}(p_k - q_k)\right|.$$

d. En déduire que, pour toute partie A de $\mathbb{N}$,
$$|P(A) - Q(A)| \leqslant D(P,Q).$$

e. Montrer qu'en prenant $A = \{k \in \mathbb{N} \mid q_k \geqslant p_k\}$, l'inégalité précédente devient une égalité.

f. En déduire que
$$D(P,Q) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \min(p_k, q_k).$$

g. On considère un couple de variables aléatoires (X,Y) tel que X soit de $P = (p_k)$ et Y de loi $Q = (q_k)$. Montrer que
$$D(P,Q) \leqslant P(X \neq Y).$$

Couplage binomiale-Poisson. Soit n un entier strictement positif et $\lambda > 0$ avec $\lambda < n$.

5. Soit $(Y_1, \cdots, Y_n)$ un n-échantillon [1] de $\mathcal{P}(\lambda/n)$. Donner sans démonstration la loi de $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$.

6. On pose pour tout $x \in [0,1]$,
$$f(x) = 1 - (1-x)e^x.$$
Vérifier que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$.

Soit $(U_1, \cdots, U_n)$ un n-échantillon de $\mathcal{B}(f(\lambda/n))$ tel que les variables U_i sont indépendantes des variables Y_i. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on pose
$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{si} U_i = Y_i \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

7. Vérifier que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre λ/n et donner la loi de $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

8. Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,
$$P(X_i \neq Y_i) \leqslant \frac{\lambda^2}{2}$$
(on pourra établir et utiliser que $1 + x \leqslant \exp(x)$).

9. Montrer que
$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \neq \sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \leqslant P\left(\cup_{i=1}^{n} [X_i \neq Y_i]\right).$$

10. En déduire que
$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \neq \sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \leqslant \frac{\lambda^2}{n}.$$

Qu'en déduit-on ?

---

1. c'est-à-dire n variables mutuellement indépendantes et de même loi.